

Test sur la théorie de Floquet

Jérémy Couturier

October 16, 2020

Contents

1	La théorie de Floquet	1
1.1	Matrice fondamentale de solution	1
1.2	Matrice de Monodromie	2
1.3	Exposants de Floquet	2
2	Application à un cas concret	2
2.1	Comparaison entre le spectre de $\mathcal{K}$ et celui de $\underline{A}$	3

1 La théorie de Floquet

1.1 Matrice fondamentale de solution

On considère le système différentiel de Cauchy

$$\dot{X} = \mathcal{A}(t) X \quad (1)$$

Où $\mathcal{A}$ est une matrice à coefficients complexes périodique du temps, de taille n et de période T .

Soit

$$\mathcal{Z}(t) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \quad (2)$$

le flot associé, c'est à dire l'application qui à la condition initiale X_0 fait correspondre la solution de 1 au temps t

$$X(t) = \mathcal{Z}(t)(X_0) \quad (3)$$

$\mathcal{Z}(t)$ est une application linéaire, d'où $\mathcal{Z}(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, $\mathcal{Z}(t)$ est solution de 1 en prenant $\mathcal{Z}(0) = \mathcal{Z}_0 = I_n$, on l'appelle la matrice fondamentale des solutions du système 1

1.2 Matrice de Monodromie

On pose $M_1(t) = \mathcal{Z}(t+T)$ et $M_2(t) = \mathcal{Z}(t)\mathcal{Z}(T)$. Comme M_1 et M_2 sont toutes deux solutions de 1 avec la même condition initiale, on a, par unicité de la solution d'un problème de Cauchy

$$\mathcal{Z}^{-1}(t)\mathcal{Z}(t+T) = \text{Cte} = \mathcal{Z}(T) \quad (4)$$

La matrice $\mathcal{Z}(T)$ est appelée matrice de monodromie du système 1. Les modules de ses valeurs propres indiquent à quel point les solutions sont dilatées ou contractées après une période tandis que les arguments de ses valeurs propres donnent des informations sur les rotations que subissent les solutions. En particulier, les solutions d'un système différentiel périodique ne sont en général pas périodiques.

1.3 Exposants de Floquet

Soit $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathcal{Z}(T) = e^{T\mathcal{K}} \quad (5)$$

On pose

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{Z}(t)e^{-t\mathcal{K}} \quad (6)$$

Un calcul direct permet de voir que $\mathcal{R}$ est périodique de période T

Dans le système 1 on fait le changement de variable périodique

$$X = \mathcal{R}(t)Y \quad (7)$$

Qui ramène 1 au système autonome

$$\dot{Y} = \mathcal{K}Y \quad (8)$$

Le comportement de 8 est complètement caractérisé par les valeurs propres de $\mathcal{K}$, appelées exposants de Floquet de 1. En particulier, l'étude de la stabilité de 1 se ramène à l'étude de la stabilité de 8 (car le changement de variable 7 est périodique) et 1 est stable, respectivement exponentiellement stable, si, et seulement si, toutes les valeurs propres de $\mathcal{K}$ ont des parties réelles négatives, respectivement strictement négatives, si, et seulement si, toutes les valeurs propres de $\mathcal{Z}(T)$ ont des modules inférieurs à 1, respectivement strictement inférieurs à 1

2 Application à un cas concret

On considère un système comme 1 où on prend

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a \cos \omega t + 1 & \sin \frac{1}{2}\omega t + 2a + \cos(\omega t + a) \\ 2 \sin \omega t + \cos \frac{1}{2}\omega t - 1 + a & a^2 \cos^2 \frac{1}{2}\omega t - \sin \omega t + 1 - 2a \end{pmatrix} \quad (9)$$

Avec $a \in \mathbb{C}$ et $\omega = 4\pi$ pour que $\mathcal{A}$ soit de période 1

2.1 Comparaison entre le spectre de $\mathcal{K}$ et celui de $\underline{\mathcal{A}}$

On note

$$\underline{\mathcal{A}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(t) dt \quad (10)$$

Et en prenant l'expression 9 on a

$$\underline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ a-1 & \frac{1}{2}a^2 - 2a + 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Dont les valeurs propres sont données par

$$\frac{1}{4} (a-2)^2 + \frac{1}{4} w \quad (12)$$

où w est tel que

$$w^2 = a (a^3 - 8a^2 + 48a - 32) \quad (13)$$

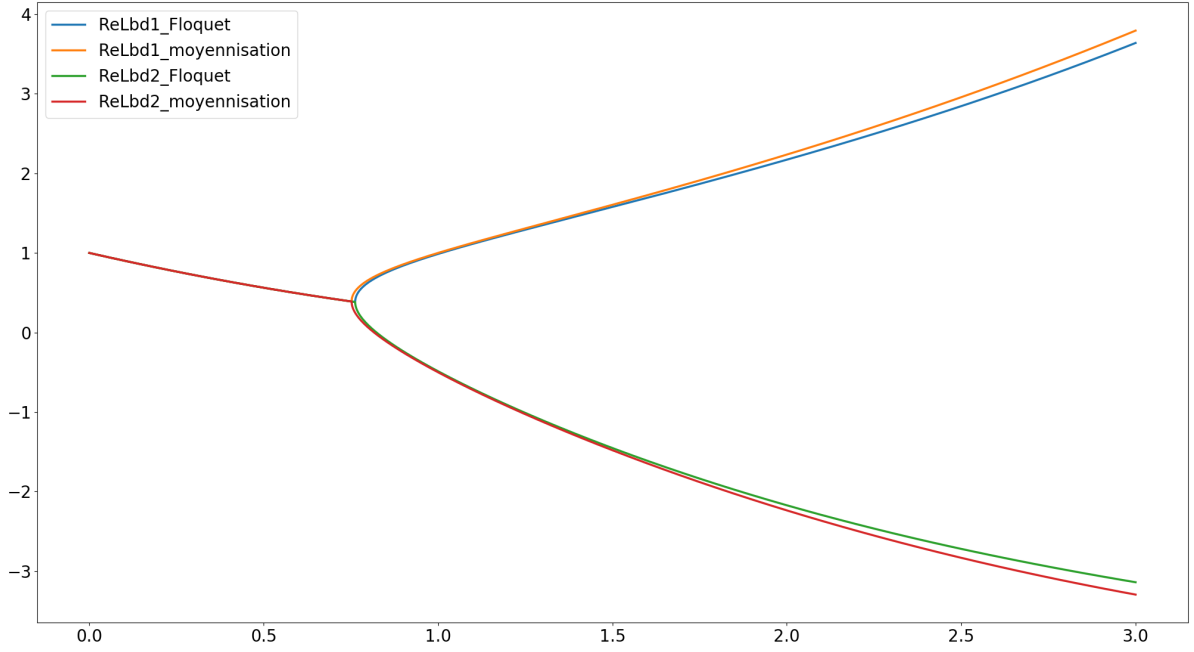


Figure 1: Partie réelle des valeurs propres de $\mathcal{K}$ et de $\underline{\mathcal{A}}$ en fonction de a

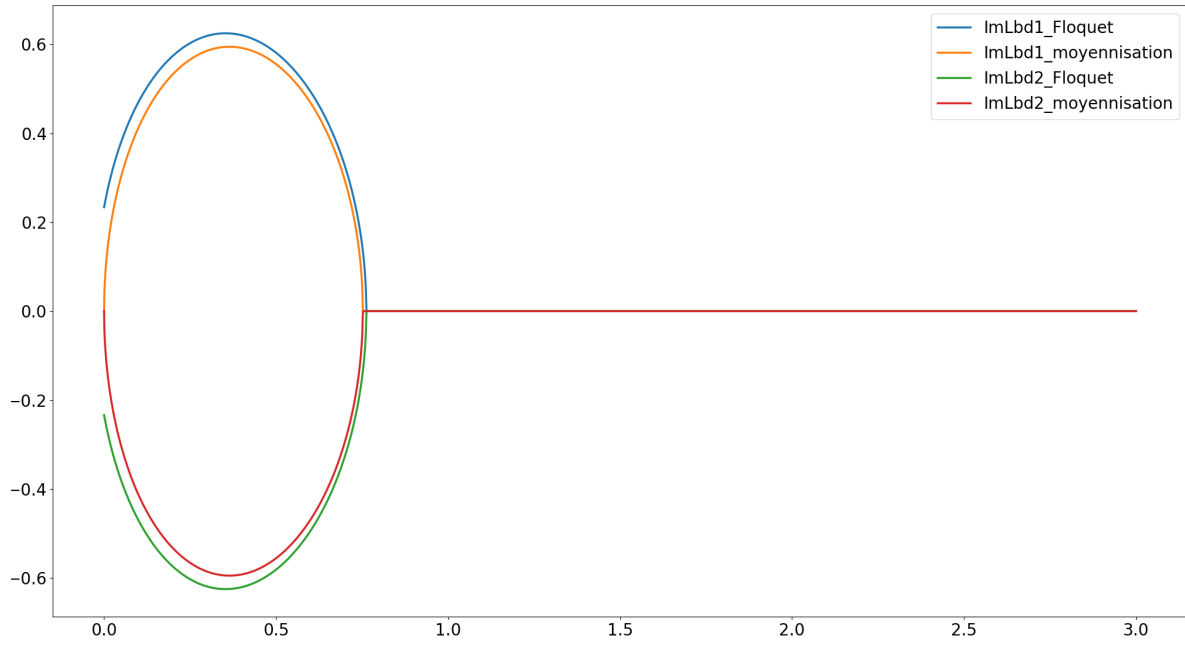


Figure 2: Partie imaginaire des valeurs propres de $\mathcal{K}$ et de $\underline{\mathcal{A}}$ en fonction de a

On constate une transition autour de $a = 0.75$. En ce qui concerne les valeurs propres de $\underline{\mathcal{A}}$, la transition a lieu à $a = 0.7520736243$ qui correspond à la racine réelle de $a^3 - 8a^2 + 48a - 32$. Pour $\mathcal{K}$ la transition a lieu vers $a = 0.763$

À gauche de ces transitions l'erreur sur la partie réelle est strictement nulle tandis qu'à droite, l'erreur sur les parties imaginaires (qui sont nulles) est strictement nulle.

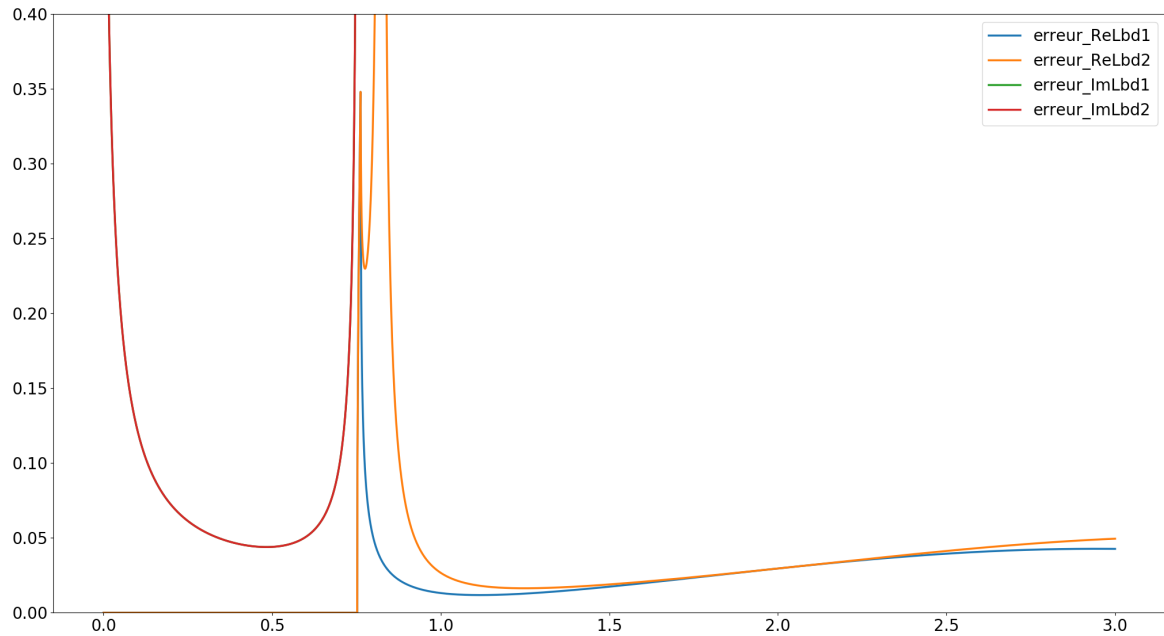


Figure 3: Erreur relative entre les valeurs propres de $\mathcal{K}$ et celles de $\underline{\mathcal{A}}$ en fonction de a

En essayant de faire l'étude numérique sur un plus grand intervalle sur a génère des problèmes car la norme de la matrice de monodromie $\mathcal{Z}(1)$ diverge rapidement que a augmente.

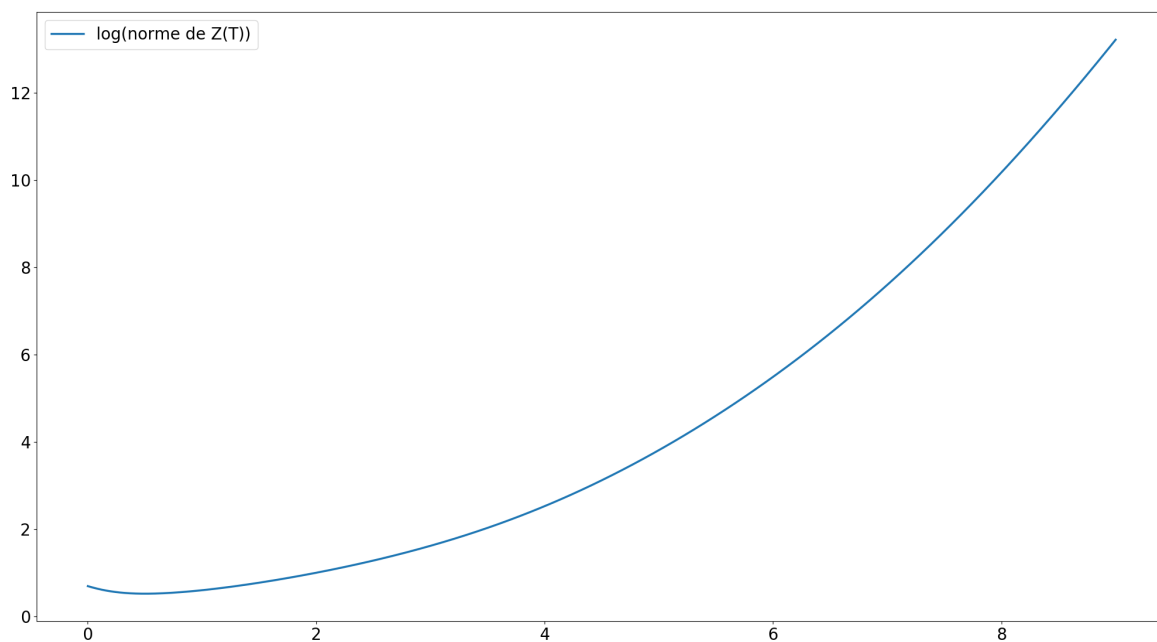


Figure 4: Logarithme décimale de la norme euclidienne de $\mathcal{Z}(1)$ en fonction de a

Appendices